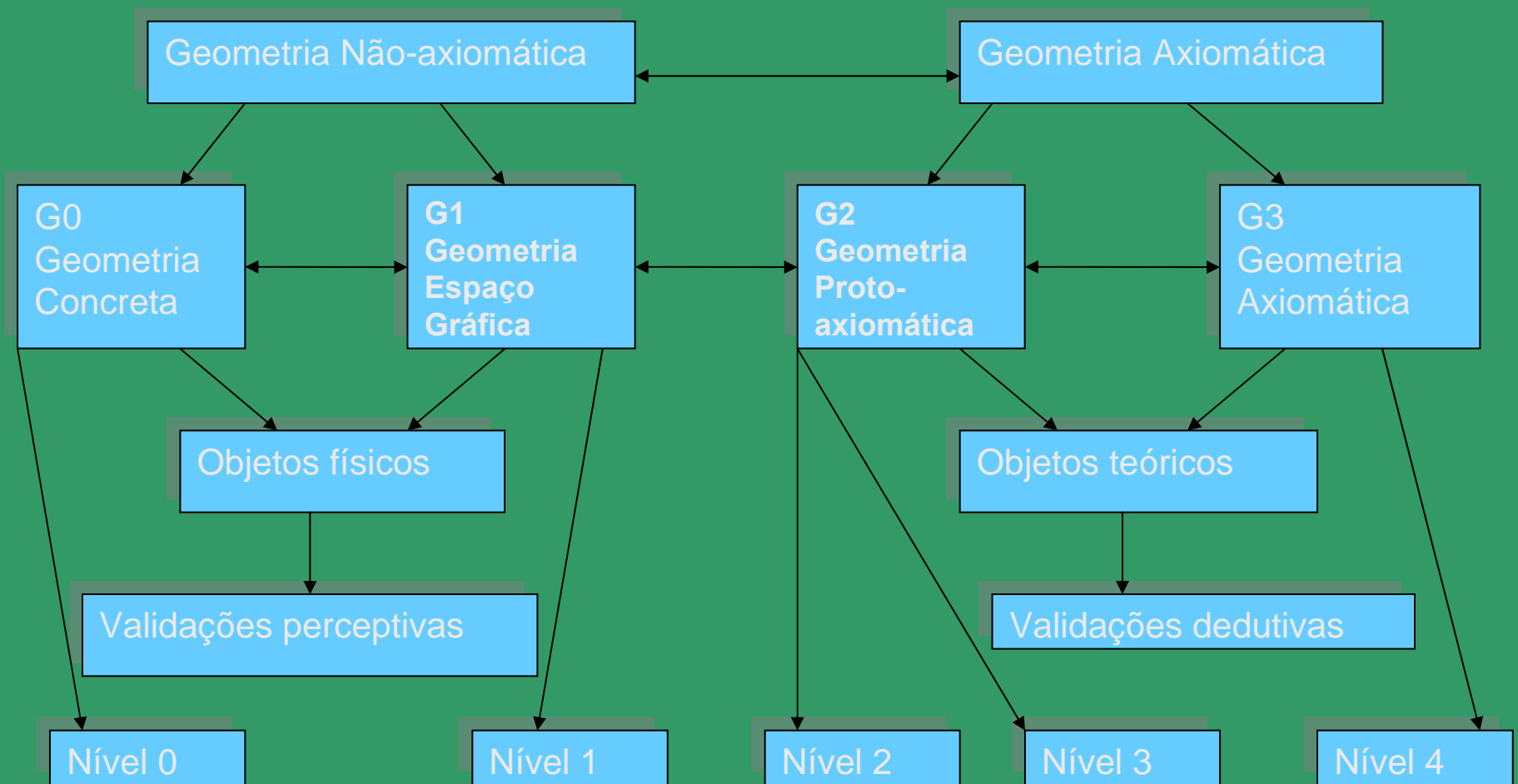




Um quadro teórico para a geometria ensinado: Estudo de Bernard Parzysz



Classificação que considera os objetos em jogo

- ◆ Parzysz (2000), estudando os processos e mecanismos relacionados com o ensino e aprendizagem da geometria no Ensino Fundamental, propôs uma classificação que considera os objetos em jogo, físicos ou teóricos e os modos de validações, perceptivo ou dedutivo.
- ◆ Como **Geometrias não-axiomáticas**, o autor apresenta **G0-Geometria Concreta** e **G1-Geometria Espaço-gráfica**.
- ◆ Em **G0** os estudos geométricos são realizados a partir de atividades concretas como maquetes, plantas e dobraduras.
- ◆ Na **Geometria Espaço-Gráfica (G1)** ainda se confunde Geometria e realidade; os alunos podem conjecturar e fazer constatações de propriedades, empiricamente.

Quanto às Geometrias axiomáticas

- ◆ Parzysz as classifica como: Geometria Proto-Axiomática (G2) e Geometria Axiomática (G3).
- ◆ Em G2, ocorre a concepção de um esquema da realidade em que as definições fazem sentido e os resultados passam a ser validados com técnicas dedutivas.
- ◆ Ainda nesse nível, a figura construída em G1 tem status de figura genérica e a dedução é reconhecida como ferramenta de validação no interior de um sistema axiomático.
- ◆ Em G3, não se faz referência à realidade e a Geometria é totalmente explicada (ou abstrata).
- ◆ Trabalhando em G3, o aluno é capaz de situar-se nos diferentes sistemas axiomáticos, bem como compará-los.

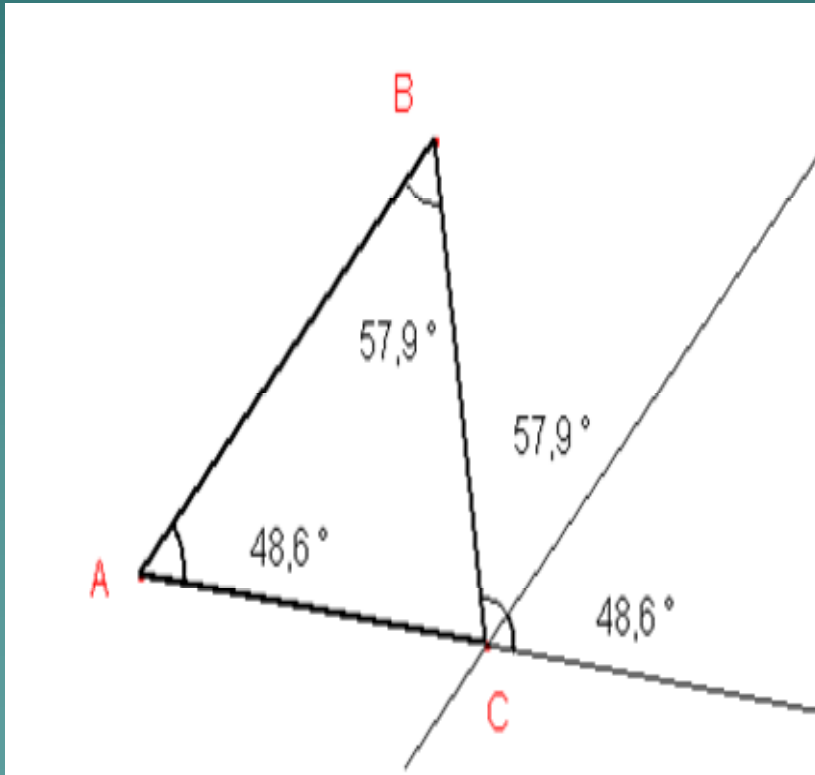
Rupturas de contrato

- ◆ Do ponto de vista didático, a distinção entre essas geometrias aparece nas *rupturas de contrato* que se produzem entre uma e outra, e mais precisamente:
 1. passagem de G0 à G1: materialidade dos objetos em jogo (madeira, papel, palha, ...)
 2. passagem de G1 à G2: largura dos traços, pontos, justificativa perceptiva.
 3. passagem de G2 à G3: propriedades julgadas "evidentes".

Um exemplo

- ◆ No problema de determinar a soma das medidas dos três ângulos de um triângulo, se o aluno confeccionar um triângulo de papel e se a seguir recortar com uma tesoura os três ângulos, formando com eles um semi-círculo, ele estará no nível G0 que corresponde a uma geometria concreta.
- ◆ Se ele desenhar um triângulo (ou construir um triângulo com ajuda de um software) e a seguir medir os três ângulos e observar a soma das suas medidas comparando-a com o resultado de seus colegas, ele estará no nível G1 (geometria espaço-gráfica)

Exemplo(2)



- ◆ Se ele traçar uma paralela a um dos lados e utilizar o fato que as retas paralelas determinam ângulos alternos internos congruentes para provar que a soma das medidas dos ângulos é igual a 180° , ele estaria no nível G2 (geometria proto axiomática),
- ◆ E se ele fizer uma demonstração apoiado num sistema axiomático de referência, ele estará no nível 3 (geometria axiomática)

Articulação entre G1 e G2

Parzysz (2000) considera que nessa articulação entre os níveis G1 e G2 a gestão do salto conceitual entre elas é um elemento essencial na problemática do ensino obrigatório da Geometria, devendo ser fixados os conceitos em jogo e sua articulação.

Articulação

- ◆ Nessa articulação, Fetissov (1997) e Arsac (1987) relevam a importância de apresentar a limitação das validações empíricas e de questionar a evidência da figura.
- ◆ Concordamos com Fetissov (1997) quando recomenda explicações de termos, de técnicas e lógicas empregadas em uma demonstração.
- ◆ Balacheff (1987) releva a importância da demonstração como único meio de legitimar uma hipótese matemática.

Análise das diferentes geometrias em termos de tipos de tarefas

- ◆ Para G1, as *técnicas* utilizadas para a resolução deste tipo de tarefas são essencialmente ligadas ao uso de instrumentos tais como a régua graduada, compasso, esquadro, transferidor (percepção instrumentalizada).
- ◆ *As tecnologias* (modo de validação) fazem igualmente uso de instrumentos, que são então utilizados para controlar o desenho construído pela constatação visual de coincidências ou de superposições: graduações da régua, pontas do compasso, bordas do esquadro, raios do transferidor...
- ◆ *o nível teórico* – ausente na prática usual – seria uma teoria relativa à precisão ou à economia do traçado, que é efetivamente atestado historicamente.
- ◆ *Esta tecnologia* é igualmente aplicada para a verificação dos instrumentos de traçado, **em particular nos antigos livros didáticos do colégio**.
- ◆ Assim, nos antigos livros, **três técnicas de G1**, todas fundamentadas na percepção (instrumentalizada ou não) são indicadas como meios de verificar a retitude de uma régua: **vista, fio estendido ao longo da régua, retorno da régua**.

Análise em termos de tarefas

- ◆ Para G2 e para o mesmo tipo de tarefas, as *técnicas* que concernem os objetos geométricos (retas, pontos, segmentos, círculos, ...), os quais a existência é assegurada pelos enunciados (definições, axiomas, propriedades admitidas...), e o uso dos instrumentos permitem obter representações (desenhos).
- ◆ *As tecnologias* correspondentes consistem na produção de um discurso do tipo dedutivo aplicado aos dados do enunciado e utilizando os *elementos de G2* encontrados anteriormente.
- ◆ O *nível teórico* é constituído por uma geometria axiomática do tipo G3 (geometria afim euclidiana).
- ◆ Uma *técnica muito geral em G2* é a realização e o estudo de « figuras » sobre os quais se faz eventualmente agir as *técnicas de G1* no objetivo de buscar os índices que permitirão chegar a uma demonstração.

A articulação G1-G2

- ◆ A articulação G1-G2 está no centro da problemática do ensino obrigatório, e mais ainda do ensino profissional, em relação ao ensino geral : o que conta, em uma perspectiva profissional, é a eficácia e não a justificativa : utiliza-se eventualmente a teoria para pesquisar procedimentos eficazes, mas não necessariamente.

Exemplo 1 : validar uma dada conjectura

- ◆ Existe (no mínimo) duas maneiras de conseguir :
 - a) Utilizar como técnica uma demonstração (eventualmente facilitada por uma « figura ») e se fundamentar em uma tecnologia constituída por um lado por uma geometria parcialmente axiomatizada, e por outro lado por um raciocínio hipotético dedutivo, o conjunto pertencente à geometria G2 (a teoria correspondente sendo uma geometria euclidiana axiomatizada do tipo G3).
 - b) Utilizar como técnica a realização de um objeto gráfico (« figura ») e se apoiar em uma tecnologia constituída de um corpus de « construções geométricas » (saídas mais ou menos diretamente de G2) associada a validação perceptiva, o conjunto pertencente da geometria G1 (a teoria correspondente sendo a geometrografia).

Exemplo 2 : mostrar que um objeto X satisfaz uma propriedade P .

- ◆ a) Podemos nos apoiar exclusivamente sobre o enunciado que define a configuração geométrica (a « figura » servindo apenas como suporte e não sendo nunca invocada) e utilizar as definições e os teoremas do curso para demonstrar que o objeto X satisfaz a condição P .
- ◆ b) Podemos construir uma « figura » comportando o objeto X , segundo as construções geométricas, e depois verificar visualmente que ela satisfaz a propriedade P . Ou ainda – mais refinado – podemos efetuar uma construção do objeto Y satisfazendo a propriedade P , e depois constatar visualmente a superposição de X e Y .

Exemplo 3 : reproduzir um desenho em uma escala dada.

- a) se o desenho a ser reproduzido é associado a um texto que o define geometricamente, a tarefa consiste primeiramente em elaborar um procedimento de construção a partir desse texto, e depois transformá-la para torná-la conforme às instruções dadas (multiplicação das distâncias pelo coeficiente adequado, os ângulos sendo conservados).
- b) se o desenho não está associado a um enunciado que o define, a tarefa consiste dessa vez a identificar um procedimento de construção possível, o restante sem mudanças com relação ao item (a).

A diferença fundamental entra as duas tarefas reside na determinação do procedimento de construção que será desenvolvido: no primeiro caso ele é dado, seja explicitamente (algoritmo), seja implicitamente (enunciado descritivo); no segundo caso, é necessário abstrair a partir do desenho, com uma possibilidade não negligenciável de "erro", isto é, de interpretação não conforme a idéia de quem concebeu o desenho inicial.

A dialética sabido/percebido

- ◆ Ao nível do ensino obrigatório, G1 e G2 encontram-se imbricadas em muitos níveis, e a resolução de um problema as faz intervir uma e outra, alternadamente, em diversos momentos.
- ◆ Por exemplo:
 1. $G1 \rightarrow G2$: modelagem de um problema « concreto »
 2. $G2 \rightarrow G1$: construção de um desenho com objetivo heurístico
 3. $G1 \rightarrow G2$: demonstração de uma conjectura resultante da observação
 4. $G2 \rightarrow G1$: "verificação", sobre um desenho, de uma conclusão teórica
- ◆ Em todos os casos se coloca em funcionamento uma verdadeira *dialética do sabido e do percebido*

A articulação G2-G3.

- ◆ A questão das relações da geometria proto-axiomática G2 com a geometria axiomática G3 se coloca igualmente.
- ◆ A primeira seria um subproduto, uma versão « suave » da segunda, na qual os « blocos » (sub-campos conceituais de Vergnaud) foram ocultos? Ou ela se situaria melhor em uma problemática diferente, a de uma geometria *em construção*?
- ◆ Mais precisamente: mesmo que saibamos que existe « em algum lugar » uma(s) geometria(s) axiomática(s) – que poderá (poderão) eventualmente servir em qualquer tipo de “caução científica” – se trata aqui de fazer os alunos terem acesso aos conhecimentos geométricos fazendo com que eles tomem responsabilidade por um duplo processo:
 1. 1º um processo de modelagem do espaço físico, efetuando-se em dois tempos : primeiramente do concreto (G0) ao Espaço-gráfica (G1), e depois do Espaço-gráfica (G1) ao proto-axiomática (G2);
 2. 2º um processo de tipo hipotético-dedutivo, na ocasião da resolução de problemas espaciais que foram anteriormente matematizados.

Tarefa do professor

- ◆ Um « expert » em geometria elementar saberá a todo momento – em princípio – **em qual geometria (G1 ou G2) ele se encontra**;
- ◆ Para ele, *o percebido guia* (conjectura) e *controla* (verificação) *o sabido, mas não o comanda*.
- ◆ **Mas isto não acontece para um iniciante** (tal como o aluno no início de escolaridade) e um objetivo maior do ensino da geometria **neste nível é justamente engajar o aluno neste processo "de especialização"**, levando-o a dominar este balanceamento dialético que é, não somente, inevitável, mas **em realidade constitutivo**, de um domínio matemático compreendido neste nível, como uma modelagem do espaço físico.

Atividade

- 1) Na primeira série do Ensino Médio, um professor de matemática entrega aos alunos uma folha com um desenho de um triângulo de lados 7 cm, 6 cm e 5 cm e pede a sua área. Nesse nível de ensino, uma provável estratégia a ser utilizada estaria situada no nível G2. Em relação aos níveis de Parzysz, qual seria uma estratégia de resolução situada no:
 - a) Nível G0?
 - b) nível G1?
 - c) Nível G2?
- 2) Elaborar um problema geométrico e indicar estratégias de resolução nos níveis G0, G1 e G2